Priemery

Matej Balog

Nech sú dané kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ich

- **ARITMETICKÝ PRIEMER** $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \ \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

- **GEOMETRICKÝ PRIEMER** $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je číslo

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

- **HARMONICKÝ PRIEMER** $H(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je číslo

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}} = n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{-1}$$

- **KVADRATICKÝ PRIEMER** $K(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je číslo

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \ \dots + {a_n}^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$$

Ak hodnotu a_i nadobúda n_i prvkov

- **ABSOLÚTNA POČETNOSŤ** hodnoty a_i je číslo

$$n_i$$

- **RELATÍVNA POČETNOSŤ** hodnoty a_i je pomer

$$\frac{n_i}{n}$$

- **VÁŽENÝ ARITMETICKÝ PRIEMER** hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_n$ je číslo

$$\frac{n_1 a_1 + n_2\, a_2 + \ \dots + n_n a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i a_i$$

kde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_n$.

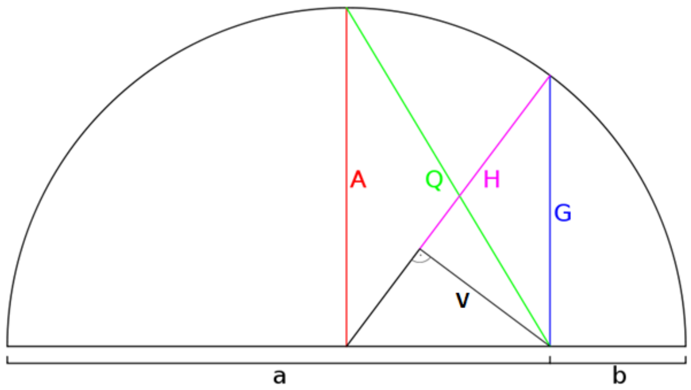
Pre každé kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí **HG NEROVNOSŤ** a **AG NEROVNOSŤ**

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) \le G(a_1, a_2, \dots, a_n) \le A(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Dôkazy

PRIEMEROVÉ NEROVNOSTI pre dvojicu kladných reálnych čísel a, b dokážeme graficky:



Polomer kružnice je

$$A = \frac{a+b}{2} = A(a,b)$$

Z Euklidovej vety o výške

$$G = \sqrt{ab} = G(a,b)$$

Dĺžku v vyjadríme porovnaním obsahov jej trojuholníka

$$v\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)G$$

Z Pytagorovej vety

$$H = \sqrt{G^2 - v^2} = G\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H(a,b)$$

Z Pytagorovej vety

$$Q = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = K(a,b)$$

Z obrázka je zrejmé, že

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq K(a,b)$$

a rovnosť vo všetkých prípadoch nastáva práve vtedy, keď $a = b$.
Všetky tri nerovnosti možno dokázať aj úpravou na štvorec.